Es: $f(x) = \dfrac{x^2 + x|x| + x}{1+x^2}$ $\qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + x}{1+x^2} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1+x^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, $\quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

vediamo se esiste x_0 t.c. $f(x_0) \geq 2$.

Cerchiamo $x_0 \geq 0$ quindi risolviamo

$$\frac{2x^2 + x}{1+x^2} \geq 2 \iff 2x^2 + x \geq 2 + 2x^2 \iff x \geq 2$$

quindi f ha massimo.

Vediamo se $\exists\, x_1$ t.c. $f(x_1) \leq 0$. In questo caso lo cerchiamo < 0. Quindi

$$\frac{x}{1+x^2} < 0 \iff x < 0 .$$

Allora f ha anche minimo.

Def: $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$

Se esiste

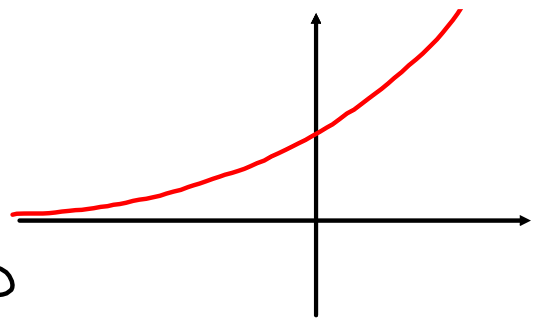
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \text{ (finito)}$$

allora si dice che f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = l$.

Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = e^x$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$\Rightarrow$ f ha un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$ (per $x \to -\infty$).

Es: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$

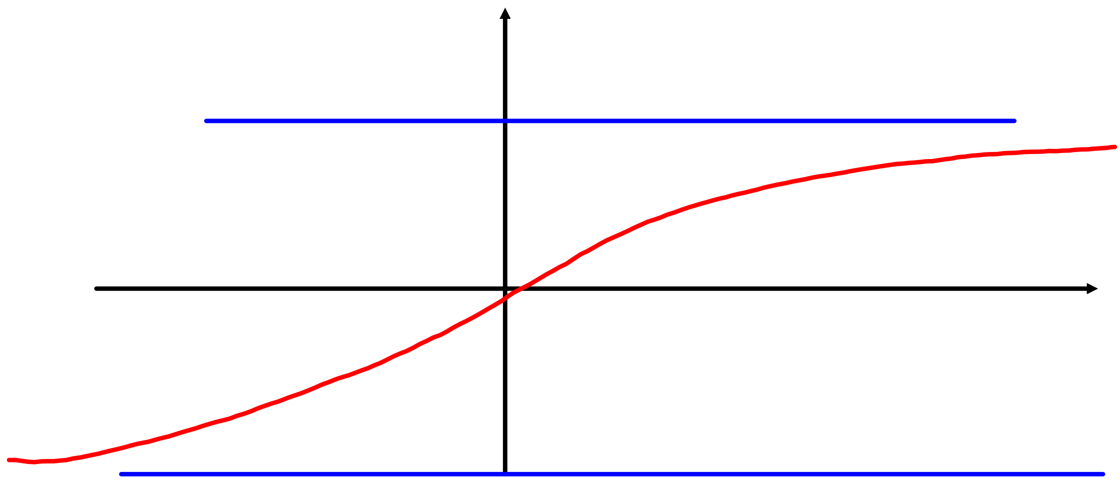
$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$$

asintoto orizzontale $y = \frac{\pi}{2}$

f è dispari

$$\Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$$

asintoto orizzont. $y = -\pi/2$

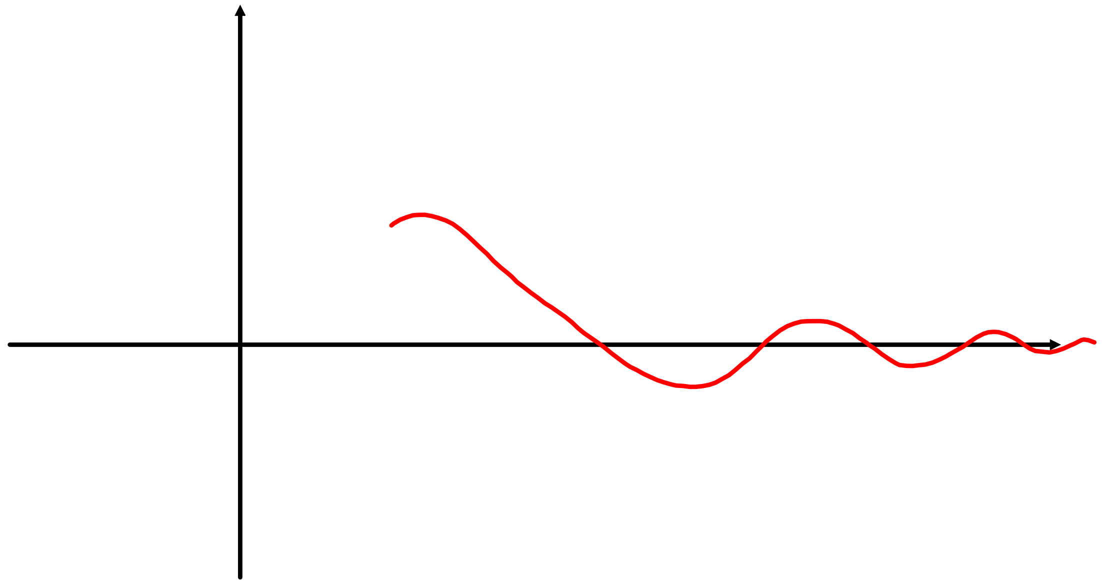


Es: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$f: (1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\text{limitata}}{+\infty} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale.



Def: $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$

si dice che f ha un asintoto verticale di equazione

$$x = x_0.$$

Lo stesso per $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x = 0$ è asintoto verticale per f perché

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty .$$

Oss: una funzione ha al massimo 2 asintoti orizzontali ma può avere anche ∞ asintoti verticali.

Es: $f(x) = tg\, x$

Def: $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$.

Se esiste

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=m\in\mathbb{R}$$

e $m\neq 0$ e se esiste

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-mx=q\in\mathbb{R}$$

allora si dice che f

ha un asintoto obliquo
di equazione

$$y = mx + q\,.$$

Lo stesso a $-\infty$.

Es: $f(x) = \dfrac{2x^2+3x+2}{x-5}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x+2}{x^2-5x}$$

$$= 2 = m$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+2}{x-5} - 2x =$$

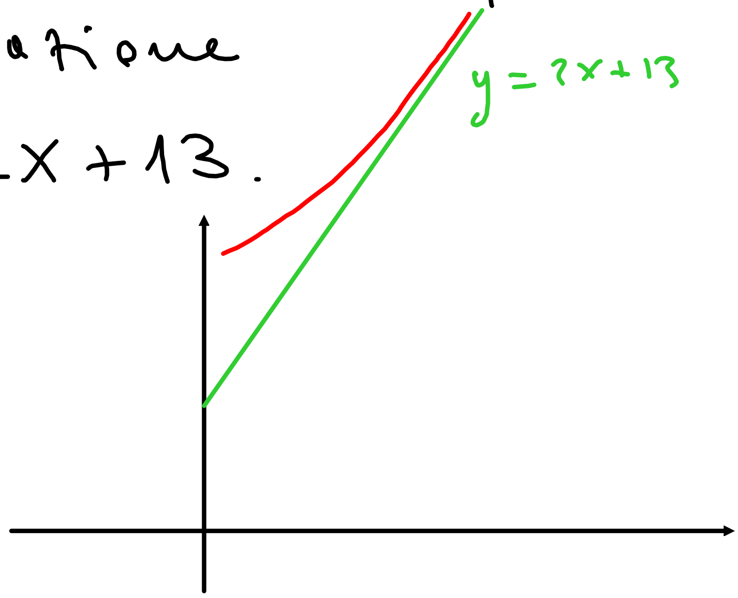
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2+3x+2-2x(x-5)}{x-5} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{2x^2}+3x+2-\cancel{2x^2}+10x}{x-5} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{13x+2}{x-5} = 13 = 9$$

f ha un asintoto obliquo
di equazione

$y = 2x + 13.$



Una funzione può avere al massimo 2 asintoti obliqui (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$).

Se f ha un asintoto orizzontale a $+\infty$ allora non ha un asintoto obliquo a $+\infty$. Lo stesso a $-\infty$.

Oss: Se f ha un asintoto obliquo a $+\infty$ allora

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm \infty$$

se $m > 0 \Rightarrow \lim_{x \to \infty} f = +\infty$

se $m < 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f = -\infty$.

Es: $f(x) = 3x + 5\log x$

$f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-\infty)$$

$$= -\infty.$$

asintoto verticale

$x = 0.$

$$\lim_{x \to +\infty} 3x + 5\log x =$$

$$= 3(\infty) + 5\log(\infty) =$$

$$= \infty + 5 \cdot \infty = \infty$$

non c'è asintoto orizzontale

forse c'è quello obliquo.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5\log x}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(3 + 5\,\frac{\log x}{x}\right) =$$

$$= 3 + 5\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 3 + 5\cdot 0 = 3$$

$m = 3$

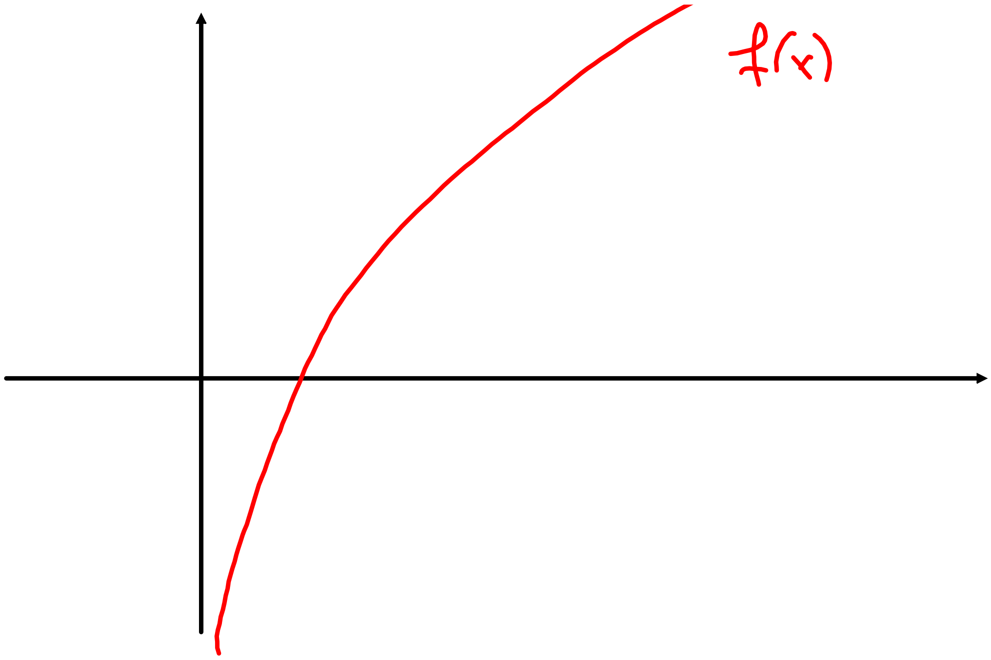
cerco di trovare q.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \cancel{3x} + 5\log x - \cancel{3x} = \infty$$

$$\Rightarrow \nexists\ q \in \mathbb{R}.$$

non c'è l'asintoto obliquo.



f(x)

Derivazione.

$A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in Acc(A)$

Se esiste il limite $x_0 \in A$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

allora l si dice derivata

di f in x_0. Se $l \in \mathbb{R}$ (quindi è finito) si dice che f è derivabile in x_0. La derivata si indica con

$$f'(x_0), \quad Df(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0)$$

Oss: esistenza della derivata e derivabilità sono due cose diverse.

Es: $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

provo a calcolare la derivata in $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$x_0 = 0$
$f(x) = \sqrt{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

($x \geq 0$ perché $\operatorname{dom}(f) = [0, +\infty)$)

$$\Rightarrow f'(0) = +\infty$$

La funzione ha derivata in $x_0 = 0$ che vale $+\infty$ ma non è derivabile in $x_0 = 0$.

<u>Oss</u>: Se f è <u>derivabile</u> in x_0 allora f è continua in x_0.

dim: per dimostrare che f è continua in x_0 basta verificare

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

quindi che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

finito perché f è

<u>derivabile</u> in x_0.

$\square$

Def: Se esiste

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

questo si dice derivata destra in x_0. e si indica con $f'_+(x_0)$

Analogamente $f'_-(x_0)$

è la derivata sinistra.

Oss: f è derivabile in x_0 se e solo se $\exists\, f'_+(x_0), f'_-(x_0)$ e sono finite e uguali tra loro.

Es: $f(x) = |x|$.

$x_0 = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$\Rightarrow$ f non è derivabile

in $x_0 = 0$.

Oss: quindi, in generale non è vero che una funzione continua è derivabile.

Oss: f è derivabile in x_0
se e solo se

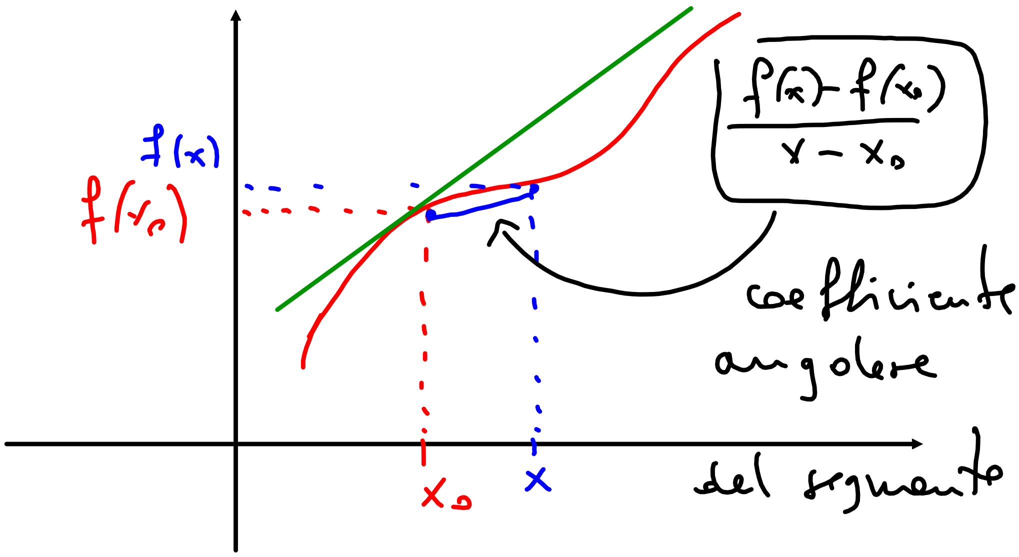
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Def: Se f è derivabile in x_0 la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si dice retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.

La derivata è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico.



f(x)
f(x0)
x0
x
f(x) - f(x0)
x - x0
coefficiente angolare del segmento

Se $f: A \to B$ è derivabile in ogni punto di A, allora $\forall x \in A$ posso calcolare $f'(x) \in \mathbb{R}$. Quindi posso definire la funzione derivata

$$f': A \to B$$

Derivate successive

Se f è derivabile in un insieme A, costruisco $f' : A \to \mathbb{R}$ e se anche f' è derivabile in A costruisco

$$D(f') : A \to \mathbb{R}$$

$D(f')$ si dice derivata seconda di f e si indica con f''.

Allo stesso modo si costruiscono le derivate successive.

f''' derivata terza

$f^{(4)}$ derivata quarta

$f^{(k)}$ $k \in \mathbb{N}$ indica la derivata di ordine k

per convenzione

$$f^{(0)} = f$$

la derivata di ordine $\emptyset$

è la funzione stessa.